INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES

POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

http://www.iheb.org/

Concours Général de Physiques

« Minko Balkanski »

16 Mai 2009

- Solutions -

Problème : Quelques aspects de l'astronautique (12pts)

I - Principe de la propulsion par réaction.

I.A Le système étudié comprend le chariot, l'opérateur et tous les sacs. Les seules forces extérieures qui s'exercent sur ce système (poids, réaction du support) sont verticales et la quantité de mouvement $\mathbf{P}$ est horizontale ; d'après $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$, on a $\mathbf{P} = \mathbf{cte}$ (et $\mathbf{F} = \mathbf{0}$). On en déduit $nm\mathbf{0} = -mu\mathbf{e}_x + (n-1)m\mathbf{V}_1$ soit $\mathbf{V}_1 = \frac{1}{n-1}u\mathbf{e}_x$. (1p.)

I.B A partir de cet instant, $\mathbf{V}_1$ reste constante jusqu'à l'instant t_2 ; lors du second lancer on écrit encore la conservation de la quantité de mouvement des $n-1$ sacs restants, dans le référentiel R, sous la forme $(n-1)m\mathbf{V}_1 = m(\mathbf{V}_1 - u\mathbf{e}_x) + m(n-2)\mathbf{V}_2$.

On en déduit : $\mathbf{V}_2 = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\right)u\mathbf{e}_x$. (1p.)

I.C Pour montrer par récurrence $\mathbf{V}_k = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{1}{n-k}\right)u\mathbf{e}_x$, il suffit d'étudier la conservation de la quantité de mouvement dans R du système des $n-k$ sacs restants, lors du k- ième lancer, soit $(n-k)m\mathbf{V}_k = m(\mathbf{V}_k - u\mathbf{e}_x) + m(n-k-1)\mathbf{V}_{k+1}$ qui s'écrit encore $\mathbf{V}_{k+1} = \mathbf{V}_k + \frac{1}{n-(k+1)}u\mathbf{e}_x$; ceci achève la démonstration par récurrence. (1,5p.)

I.D Au cours de la durée T, la variation de vitesse est $\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_{k-1} = \frac{1}{n-k}u\mathbf{e}_x$ et l'accélération est donc $\mathbf{a}_k = \frac{u}{T(n-k)}\mathbf{e}_x$. (1p.)

I.E Le débit de masse est $D_m = \frac{m}{T}$ donc $\mathbf{a}_k = \frac{D_m u}{mT(n-k)}\mathbf{e}_x$. (0,5p.)

I.F On déduit de ce qui précède $(n-k)m\mathbf{a}_k = \Pi$ donc $\Pi = D_m u\mathbf{e}_x$. (0,5p.)

II - Propulsion par moteur fusée.

II.A Le système fermé étudié est formé de la fusée et des gaz qui seront éjectés entre t et $t+dt$; à l'instant t, ce système a une masse $m(t)$ et une vitesse $\mathbf{V}(t)$. A l'instant $t+dt$, la fusée, de masse $m(t+dt) = m(t) - D_m dt$ a une vitesse $\mathbf{V}(t+dt)$ et les gaz éjectés, de masse $D_m dt$ ont, dans R, une vitesse $\mathbf{V}(t)+\mathbf{u}$.
On écrit alors $\mathbf{R} = m(t+dt)\mathbf{V}(t+dt) + D_m dt(\mathbf{V}(t)+\mathbf{u}) - m(t)\mathbf{V}(t)$ ou, après un développement au premier ordre, $m(t)\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{R}+\mathbf{T}$ où $\mathbf{T} = -D_m\mathbf{u}$. (1p.)

II.B Si $\mathbf{R}=\mathbf{0}$, l'équation $m\frac{dV}{dt} = -\frac{dm}{dt}u$ s'écrit $dV = -\frac{dm}{m}u$ donc :

$$\Delta V = V_f - V_i = u\ln\frac{m_i}{m_f}$$ (0,5p.)

II.C $Q = \frac{m_f V_f^{\,2}}{m_e u^2} = x^2\frac{m_f}{m_e} = x^2\frac{m_f}{m_i - m_f}$ se met sous la forme $Q = \frac{x^2}{\exp x - 1}$. (0,5p.)

Tracé facile - $Q(0) = Q(\infty) = 0$, d'où l'existence d'efficacité maximale. En effet, si $x\to 0$, l'efficacité est faible car la fusée a une vitesse finale faible ; si $x\to\infty$, l'efficacité est faible car le gaz sont propulsés à trop grande vitesse. On doit adapter le système de propulsion à la fusée pour obtenir une efficacité optimal. (0,5p.)

II.D De $m\mathbf{a} = m\mathbf{g}+\mathbf{T}$ on tire $D_m = \frac{m(a+g)}{u} = 10^4\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$; c'est un débit énorme puisqu'il suffirait de 200 secondes pour éjecter toute la masse de la fusée. (0,5p.)

II.E $\frac{dV}{dt} = -g + \frac{D_m u}{m_0 - D_m t}$ s'intègre selon $V = -gt + u\ln\frac{m_0}{m_0 - D_m t}$. Une second intégration de $V = \frac{dz}{dt}$ mène à $z = -g\frac{t^2}{2} + \frac{m_0 u}{D_m}\left[1 + \frac{m_0 - D_m t}{m_0}\left(\ln\frac{m_0 - D_m t}{m_0} - 1\right)\right]$. (1p.)

II.F $E_p = -\frac{GM_T m}{R_T}$ où $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^{\,2}}$ donc $E_p = -mg_0R_T \;\Rightarrow\; E_p = -64\,\mathrm{MJ}$ (0,5p.)

II.G Il faut réaliser la combustion de 3,2 kg de mélange pour envoyer un seul kilogramme de matière de la surface de la Terre à l'infini, dans le cas idéal. Il en faut de fait beaucoup plus, car on fait aussi monter les gaz brûlés, les étages de la fusée, etc. Finalement, il faut une fusée de 2000 t (Saturn V) pour propulser hors du champ gravitationnel terrestre un système de quelques tonnes. (0,5p.)

III – Le moteur ionique.

III.A $T = D_m u$ où $\frac{1}{2}\mu u^2 = qU_t$ donc $T = D_m\sqrt{\frac{2qU_t}{\mu}}$. (0,5p.)

III.B $T = m\gamma$ impose D_m ; mais $D_m = \mu D$ où D est le débit de particules et $I = qD$ est le courant électrique ; on a donc $I = \frac{qm\gamma}{\mu}\sqrt{\frac{\mu}{2qU_t}}$ et $P_{e\min} = U_t I$ donc $P_{e\min} = m\gamma\sqrt{\frac{qU_t}{2\mu}}$ (0,5p.)

III.C Applications numériques :

D'après l'énoncé $\frac{T}{P_e} = 4{,}0\times10^{-5}\,\mathrm{SI}$ et $\sqrt{\frac{\mu}{2qU_t}} = 2{,}5\times10^{-5}\,\mathrm{SI}$; les valeurs proposées ne sont cohérentes que du point de vue des ordres de grandeur ; le modèle du moteur ionique demande à être affiné ! (0,5p.)

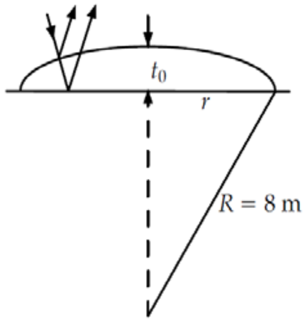
Exercice 1 (3pts)

La lumière réfléchie par l'interface supérieure de la couche d'air ne change pas sa phase, par contre celle réfléchie par l'interface inferieure est renversée de π $(180°)$. Dans ce cas là il y une frange sombre à l'arrête de la lentille et chaque fois quand l'épaisseur satisfait l'équation : $2t = m\lambda$, avec $m = 0{,}1{,}2{,}...$

(a) Au centre on a $m = 50$ et donc $\underline{\underline{t_0}} = \frac{50\lambda}{2} = 25\times(589\times10^{-9}\,\mathrm{m}) = \underline{\underline{1{,}47\times10^{-5}\,\mathrm{m}}}$ (1p.)

(b) Dans le triangle rectangle on a :

$$(8\mathrm{m})^2 = r^2 + (8\mathrm{m} - 1{,}47\times10^{-5}\mathrm{m})^2 = r^2 + (8\mathrm{m})^2 - 2(8\mathrm{m})^2(1{,}47\times10^{-5}\mathrm{m}) + 2\times10^{-10}\mathrm{m}$$



Le dernier terme étant négligeable on a :

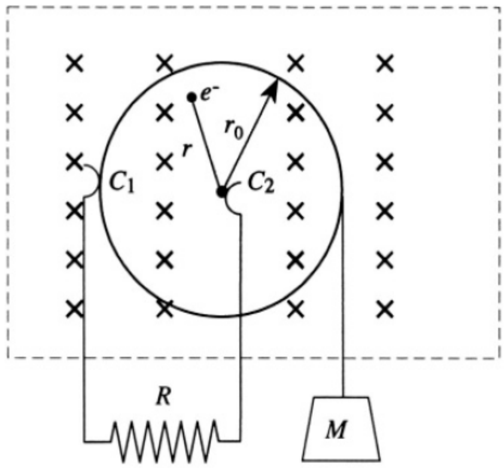
$$\underline{\underline{r}} = \sqrt{2(8\mathrm{m})(1{,}47\times10^{-5}\mathrm{m})} = \underline{\underline{1{,}53\times10^{-2}\,\mathrm{m}}} \quad (1p.)$$

(c) $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1{,}50-1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{8{,}00\mathrm{m}}\right)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f = -16{,}0\mathrm{m}}} \quad (1p.)$$

Exercice 2 (5pts)

(a) Considérons un électron à une distance r de l'axe (C_2) du disque (voir la figure ci-dessous). Il est subis à la force de Lorentz, qui s'écrit : $\mathbf{F} = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$,avec $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. (0,5p.)



D'où l'existence d'une force radiale : $\mathbf{F}_r = \frac{e}{c}\left[(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\times\mathbf{B}\right] = \frac{e}{c}\omega B\mathbf{r}$ (0,5p.) On en déduit le champ électrique correspondant $E = -(1/c)\omega Br$, et la tension :

$$V = -\int_0^{r_0} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{c}\omega B\int_0^{r_0} r dr = \frac{\omega B r_0^{\ 2}}{2c} \quad \text{(0,5p.)}$$

Enfin pour le courant on trouve l'expression :

$$\underline{\underline{i = \frac{V}{R} = \frac{\omega B r_0^{\ 2}}{2Rc}}} \qquad \text{(0,5p.)}$$

(b) La puissance dissipée dans la résistance s'écrit : $P = i^2 R = \frac{\omega^2 B^2 r_0^{\ 4}}{4Rc^2} = \frac{\dot{\varphi}^2 B^2 r_0^{\ 4}}{4Rc^2}$ (0,5p.)

L'énergie cinétique du disque : $T = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}$ (0,5p.) , avec I le moment d'inertie du disque. Par le théorème de conservation d'énergie :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\dot{\varphi}^2}{2}\right) + \frac{\dot{\varphi}^2 B^2 r_0^{\ 4}}{4Rc^2} = Mgr_0\dot{\varphi} \qquad \text{(1p.)}$$

La vitesse angulaire à l'état final $\dot{\varphi} = \omega_f = cte$ (0,5p.), peut être considérée comme constante, d'où :

$$\frac{\omega_f^{\ 2} B^2 r_0^{\ 4}}{4Rc^2} = Mgr_0\omega_f \ \Rightarrow \ \omega_f = \frac{4MgRc^2}{B^2 r_0^{\ 3}}$$

Finalement on trouve :

$$\underline{\underline{i_f}} = \frac{\omega_f B r_0^{\ 2}}{2Rc} = \underline{\underline{\frac{2Mgc}{Br_0}}} \qquad \text{(0,5p.)}$$

<u>*Remarque* :</u> On peut aussi utiliser directement la conservation de l'énergie et écrire les équations pour deux instants t et $t+dt$ en disant que l'énergie potentielle perdue par le masse M est égale à l'énergie dissipée dans la résistance R.